Le convinzioni degli insegnanti elementari sull'infinito matematico

Seconda parte[1]

Silvia Sbaragli
Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica
Dipartimento di Matematica – Università di Bologna

Questo articolo è stato oggetto di pubblicazione in:
Sbaragli S. (2003). Le convinzioni degli insegnanti elementari sull'infinito matematico. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* Prima parte: 26A, 2, 155-186. Seconda parte: 26A, 5, 573-588.

Questa ricerca si inserisce nella complessa problematica dell'insegnamento e dell'apprendimento del concetto di infinito matematico mettendo in evidenza le convinzioni, le accettazioni intuitive, i processi mentali degli insegnanti di scuola elementare.
In particolare, in questa seconda parte dell'articolo riportiamo alcune considerazioni relative alle affermazioni degli insegnanti di scuola elementare (contenute nella prima parte di questo articolo) in risposta ad un questionario proposto per sollecitare successivi scambi di opinioni riguardanti l'infinito matematico.

7.2. L'idea di punto

In molte affermazioni degli insegnanti, soprattutto tra le risposte alla domanda n. 4 del questionario (contenuta nel paragrafo 6.2. della prima parte) basata sul misconcetto che a diversa lunghezza dei segmenti debba corrispondere un diverso numero di punti, sono emerse convinzioni legate all'idea di punto come ente avente una certa dimensione, anche se molto piccola. Convinzione derivante dalla rappresentazione che viene comunemente fornita del punto e che condiziona l'immagine che si ha di questo oggetto matematico. In realtà, anche chi non esplicita direttamente questa misconcezione, ma risponde alla domanda n. 4 sostenendo che in un segmento più lungo vi sono più punti rispetto ad un segmento più corto, mette in evidenza una "ingenua" interpretazione di ciò che si intende per segmento e per punto.
Riportiamo di seguito alcune affermazioni relative alla domanda n. 4:
B.: Nel segmento CD; per forza, ha una lunghezza maggiore.
S.: Quanti in più?

---

[1] Questa rappresenta la seconda parte dell'articolo; la prima è stata pubblicata nel numero precedente di questa stessa rivista.

B.: Dipende quanto li fai grandi.

M.: Anche da come li fai larghi o attaccati; ma se li avvicini al massimo e li fai grandi uguali ce ne sono di più in CD.

G.: In CD, è più lungo.

S.: Ma tu li vedi raffigurati i punti qui sopra?

G.: Sì, è la geometria che facciamo che tende a farceli vedere i punti.

Di seguito riportiamo l'affermazione già menzionata nella prima parte dell'articolo relativa alla domanda n. 1:

N.: Ah, è vero, sono infiniti. Ma per dire un numero grande, ma non grandissimo come nella retta. Anche se si fanno piccoli piccoli i punti, più di tanti non ce ne stanno.

Da queste affermazioni risulta molto presente il cosiddetto "modello della collana", già citato in questo articolo, che si basa sull'idea di segmento come una fitta collana formata da perline, che rappresentano i punti, unite da un filo. Questa immagine mentale è citata dai ragazzi delle superiori in Arrigo e D'Amore (1999, 2002), dove viene messo in risalto come molto spesso gli studenti delle superiori si ancorino a modelli visti alla scuola elementare; modelli forniti in buona fede dagli insegnanti, che risultano in realtà fonte di ostacoli verso la comprensione del concetto di infinito matematico e della topologia della retta. In effetti, avendo accettato il modello intuitivo del segmento come un filo formato da perline, si crea di conseguenza nella mente degli studenti un *modello parassita* (Fischbein, 1985). Ossia, quando l'insegnante propone un'immagine forte e convincente di un concetto, che diventa persistente, confermata da continui esempi ed esperienze, l'immagine si trasforma in modello (D'Amore, 1999), c'è insomma rispondenza diretta tra la situazione proposta ed il concetto matematico che si sta utilizzando; ma questo modello potrebbe, come in questo caso, non essere ancora rappresentativo del concetto all'interno del sapere matematico, diventando così *modello parassita* che allontana dalla comprensione del concetto stesso.

Ciò che sorprende è che dalle affermazioni fornite dagli insegnanti in questa ricerca risulta che il "modello della collana" non rappresenta solo uno stratagemma didattico inventato in buona fede dagli insegnanti per fornire ai propri studenti un'idea di segmento, con la consapevolezza però che questa è solo un'approssimativa immagine assai distante dal reale concetto matematico di segmento, bensì appare come l'effettivo modello che gli insegnanti stessi hanno di segmento e di punto. Inoltre, dalle conversazioni risultano lampanti diverse manchevolezze nelle competenze degli insegnanti, legate soprattutto ai concetti di densità e di continuità della retta.

7.3. Infinito potenziale ed attuale

Durante lo scambio di opinioni, diversi insegnanti hanno fornito affermazioni che rientrano con forza in una visione potenziale dell'infinito; in effetti, anche quando alcuni insegnanti hanno proposto concezioni attribuibili all'infinito attuale, come: «*La retta è formata da infiniti punti*», successivamente sono risultati incoerenti sostenendo che si dice retta solo per intendere un segmento che diventa sempre più lungo, rientrando così in una visione potenziale dell'infinito.

Qui di seguito abbiamo analizzato due dei tanti esempi che mettono in evidenza una visione potenziale dell'infinito:

R.: Diciamo che i numeri naturali sono infiniti, ma sappiamo che questo non significa nulla, perché non si possono quantificare! È come dire un numero così grande che non si riesce a dire; nel senso che puoi sempre andare avanti. Dire retta è come non dire niente, mica esiste, è solo per dire che è una linea sempre più lunga.

Un aspetto che emerge dall'affermazione di R. è che la parola infinito viene citata, ma non rappresenta una quantità; affermare che i numeri naturali sono infiniti (frase molto usata che sembra a prima vista rientrare in una visione attuale dell'infinito), rappresenta solo un modo di dire un numero finito grande. Inoltre da questa affermazione sembrerebbe emergere la convinzione che tutto ciò che riguarda l'illimitato e l'infinito sia percepito come non esistente, essendo non rintracciabile nel mondo sensibile, mentre concetti come ad esempio: segmento, quadrato, rettangolo, dei quali è possibile ricercare attorno a noi approssimativi "modelli", siano còlti come esistenti. Ma questa concezione fa perdere il significato della matematica e dei suoi concetti; in effetti, se non si percepisce l'astrattezza di tutti gli enti matematici, anzi ci si ostina a pensarli come esistenti nel mondo sensibile, si prova poi un forte disagio ad immaginare concetti come l'infinito matematico o la topologia della retta. Il problema che emerge è che alcuni insegnanti pensano che buona parte della matematica sia legata al mondo concreto e sensibile, mentre vi sono alcuni concetti come la retta o l'infinito che risultano lontani dal mondo delle cose e quindi non trattabili nella scuola elementare. Un insegnante in effetti ha affermato: *«Se una cosa non esiste come la retta, che senso ha insegnarla»*. Le stesse considerazioni valgono anche per l'affermazione seguente:

N.: Dico che i numeri sono infiniti, ma so che è solo immaginazione, che non si riesce ad ottenerli mai tutti, si dice per dire sempre più grande. L'infinito non lo puoi mica raggiungere.

Con concezioni di questo tipo è possibile fornire immagini ai propri allievi lontane dalla matematica e che possono risultare di ostacolo nel momento in cui gli allievi si trovano a dover affrontare corsi di Analisi alle superiori ma anche prima, quando nella scuola media vengono proposti concetti come: la densità di Q, i numeri irrazionali come π, il rapporto tra il lato e la diagonale di un quadrato ed altri esempi ancora.

Dalle affermazioni degli insegnanti intervistati emerge quasi esclusivamente la visione potenziale dell'infinito; a tal proposito, sono state molto interessanti le discussioni che si sono avute quando il ricercatore ha tentato di far cògliere la duplice natura dell'infinito: attuale e potenziale, così come si era rivelata allo stagirita Aristotele (384-322 a.C.).

- 10 insegnanti rimangono ancorati alla visione potenziale dell'infinito; a questo proposito riportiamo uno stralcio di conversazione:

M.: Per me esiste solo l'infinito potenziale, l'altro non c'è, è pura fantasia, dimmi dov'è?

S.: Parlando di retta.

M.: Ma la retta, dov'è? Non c'è, è un'invenzione quindi l'infinito attuale non c'è.
S.: Che cosa pensi della retta?
M.: Secondo me queste cose non andrebbero insegnate, almeno alle elementari, come fanno quei poveri bambini! Sì, tu lo puoi anche dire la retta è formata da infiniti punti, ma loro che cosa capiscono (non ci credo neanche io!), se non la vedono a quell'età non possono capire. Le cose le devono poter toccare con mano.
N.: Per me esistono cose veramente grandi, ma pur sempre finite, il resto non esiste.
• 6 insegnanti sembrano percepire il senso dell'infinito attuale. In particolare, di tre insegnanti si nota lo sguardo illuminato dell'avvenuta scoperta della distinzione che c'è tra le due concezioni: potenziali ed attuali.
A.: Non ci avevo mai pensato a questa distinzione, ma ora ho capito, riesco ad immaginarlo.
B.: Non ci avevo neanche mai pensato, nessuno mi aveva fatto riflettere su questo problema, ma sinceramente io ho sempre pensato che fosse solo nel senso di procedere sempre di continuo. Però ora ho inteso la differenza.
Da quest'ultima affermazione si sente il disagio degli insegnanti di non aver avuto modo di riflettere su questioni così importanti che coinvolgono temi che dovrebbero, in parte, dominare per evitare misconcezioni nei loro allievi.

Il problema di fondo è che "nessuna grandezza sensibile è infinita", quindi questi argomenti risultano contrari all'intuizione e distaccati dall'esperienza quotidiana (Gilbert e Rouche, 2001). A tal proposito, varie ricerche [Moreno e Waldegg (1991), Tsamir e Tirosh (1992), Shama e Movshovitz Hadar (1994), D'Amore (1996, 1997), Bagni (1998, 2001)] hanno messo in evidenza che nell'acquisizione dell'*infinito attuale* si individuano ostacoli epistemologici derivanti dall'intuizione primaria e la storia della matematica ne è una testimonianza; basta pensare che nei 2200 anni trascorsi da Aristotele ad oggi, la critica sull'infinito si è evoluta molto lentamente ed in modo non omogeneo (Arrigo e D'Amore, 1993).
La concezione dell'infinito fino al XVIII secolo era potenziale, così com'è potenziale l'impostazione di chi è lasciato all'intuizione e non ha avuto modo di riflettere su questi concetti. Eppure la concezione attuale dell'infinito risulta necessaria negli studi di Analisi, anche se si tende per anni a far credere agli alunni che vi sia un unico modo di pensare a questo concetto, il potenziale. In effetti, alle superiori gli studenti dovranno scontrarsi con la nuova necessaria concezione attuale che potrebbe risultare a quel punto di difficoltà insormontabile, dato che negli anni precedenti potrebbe essersi formato un modello intuitivo di infinito ben radicato e inteso solo in senso potenziale, legato solamente alle proprie intuizioni e a quelle dei loro insegnanti, ma lontane dal mondo della matematica.
Ancora, Tsamir (2000) afferma: «*La teoria cantoriana degli insiemi e il concetto di infinito attuale sono considerati contrari all'intuizione a tali da generare perplessità, pertanto non sono facilmente acquisibili; per insegnarli è necessaria una speciale sensibilità didattica*»; ma per chi non ha affrontato alle scuole

superiori questi argomenti e non è stato più costretto ad un ripensamento, rimane l'immagine ancorata all'intuizione precedente basata solo sull'infinito potenziale.
Ma allora, se ai maestri (e non solo) questo argomento non è mai stato insegnato, è ovvio che non potranno che essere legati esclusivamente alle loro intuizioni, che la storia della matematica evidenzia come contrarie alla teoria; di conseguenza la "sensibilità didattica", di cui parla Tsamir, non potrà essere presente e questo è fonte di ostacoli didattici collegati agli inevitabili ostacoli epistemologici.
Si evidenziano così ostacoli epistemologici rafforzati da ostacoli didattici. L'intuizione domina, ma è rafforzata anche dall'insegnamento ricevuto. Tutto appare come una catena che si autoalimenta: insegnanti che si fondano sulle loro intuizioni, che sono state a loro volta rafforzate dai loro insegnanti che si fondavano solo sulle loro intuizioni, che sono state a loro volta... Questa catena va interrotta mettendo in evidenza le carenze degli insegnanti e prevedendo di conseguenza una didattica specifica sull'infinito sia per insegnanti in formazione che per insegnanti in servizio, per ovviare così a quei disagi e a quelle difficoltà che tante ricerche hanno evidenziato in studenti di scuola superiore.

7.4. Il bisogno del "concreto"

Da diversi colloqui con gli insegnanti emerge un'opinione assai diffusa circa il bisogno che hanno i bambini di scuola elementare di modelli concreti per riuscire a capire i concetti matematici; tale opinione giustifica le scelte didattiche della collana di perline come modello di segmento o il segno lasciato dalla matita o il granello di sabbia come modelli di punto matematico. Ma non tutto si presta ad essere modellizzato senza alcuna conseguenza, anzi molto spesso nella trasposizione didattica le scelte fatte derivanti da un eccessivo riferimento al mondo concreto, condizionano in modo negativo l'apprendimento futuro degli studenti. Inoltre, sperimentando con bambini di scuola elementare e con insegnanti disposti a cambiare impostazione nel loro insegnamento, si nota come per i bambini sia piacevole e semplice entrare in un mondo lontano dal mondo sensibile; allo stesso tempo si nota come, lavorando in questo modo, diventi più semplice per gli insegnanti affrontare i concetti matematici che sono per loro stessa natura lontani dal mondo concreto. A questo proposito viene spontaneo domandarsi se il bisogno del concreto sia un'esigenza dell'insegnante o dei bambini. In effetti, è ben evidente la difficoltà che mostrano la maggior parte degli insegnanti nel pensare a questioni distaccate dalla realtà del mondo che ci circonda, e allo stesso tempo si nota la facilità ed il piacere che mostrano invece talvolta i bambini ad estraniarsi dal mondo sensibile.
A questo proposito, riportiamo due affermazioni degli insegnanti avvenute durante i colloqui e che risultano in opposizione l'una rispetto all'altra. La prima è già stata riportata e analizzata da un altro punto di vista nel paragrafo 7.2.:

M.: Secondo me queste cose non andrebbero insegnate, almeno alle elementari, come fanno quei poveri bambini! Sì, tu lo puoi anche dire la retta è formata da infiniti punti, ma loro che cosa capiscono (non ci credo neanche io!), se non la vedono a quell'età non possono capire. Le cose le devono poter toccare con mano.

A.: Per me invece questi concetti si devono immaginare più che trovare; nella scuola elementare ci si riesce solo andando a pescare nell'immaginario che è ricchissimo: "Una retta è una linea che arriva fino nel più lontano spazio infinito", e loro se lo immaginano… Dico che il punto non si può misurare, pesare. C'è, ma non si vede, è come una magia. Così ci si riesce perché pescano in un mondo che non è più quello della concretezza. Bisogna andare in un mondo dell'immaginario, così ci riescono.

(Quest'ultima insegnante aveva sostenuto un esame di Analisi all'Università).

8. Risposte alle domande formulate in 4.

Siamo ora in grado di rispondere alle domande di ricerca formulate in 4., contenuto nella prima parte di questo articolo.

P1. La risposta ci pare ampiamente negativa. Non vi è alcuna conoscenza di ciò che si intende per infinito matematico sia epistemologicamente che cognitivamente e questo deriva sicuramente dal tipo di tematica, totalmente caratterizzata da ostacoli epistemologici e dalla mancanza di uno studio specifico su questo argomento. L'infinito è, per gli insegnanti di scuola elementare, un concetto sconosciuto gestito solo dall'intuizione e per questo ridotto banalmente ad un'estensione del finito; questo è causa di modelli intuitivi che costituiscono vere e proprie misconcezioni. Ossia gli insegnanti accettano la nozione euclidea: «Il tutto è maggiore di ogni sua parte» per il finito e tendono a considerarla vera anche per l'infinito cadendo nel misconcetto di *dipendenza*; ma l'"essere sottoinsieme proprio" e "avere meno elementi" sono espressioni che non vanno confuse se si parla di insiemi infiniti. Ma l'insegnante elementare, avendo avuto durante la sua formazione, solo continue conferme di quello che avviene nel finito, lo ha assunto come modello intuitivo assoluto e, come tale, proposto ai propri allievi. Ossia gli insegnanti tendono a generalizzare per l'infinito ogni concetto che vale nel finito: se un insieme A è sottoinsieme proprio di un insieme B, allora automaticamente la cardinalità di B è maggiore di quella di A. Alla costruzione di questo misconcetto collabora anche il modello intuitivo che possiedono gli insegnanti del segmento come filo formato da perline e che porta alla *dipendenza* da fatti relativi a misure. Molto presente è inoltre il misconcetto di *appiattimento* che però ha sicuramente una ricaduta didattica meno influente alla scuola elementare rispetto alla *dipendenza*. Quanto alla retta come figura illimitata ed il conteggio prolungato dei numeri naturali, sembrano fornire agli insegnanti la capacità di vedere l'infinito solo in potenza e non in atto, il che crea gravi ostacoli didattici (Tsamir e Tirosh, 1992; Shama e Movshovitz Hadar, 1994; Bagni, 1998, 2001; Tsamir, 2000).

P2. La risposta risulta affermativa. Le immagini intuitive degli allievi relative all'infinito vengono rafforzate dalle continue sollecitazioni degli insegnanti che tendono a trasferire ai propri allievi i loro modelli intuitivi che sono, a loro insaputa, vere e proprie misconcezioni (descritte in P1). Queste convinzioni permangono così nella mente degli studenti e si rafforzano, tanto da costituire un ostacolo difficile da superare al momento in cui l'infinito viene trattato in modo attuale alle superiori. In effetti modelli intuitivi, come ad esempio il modello del segmento come collana, rendono impossibile concepire e comprendere l'idea di densità che viene presentata a partire dalla scuola media o addirittura dalla scuola elementare. Per esempio quando si pongono i cosiddetti numeri frazionari sulla "retta razionale" r_Q, il modello della collana resiste e la densità resta un fatto puramente potenziale; inoltre a molti studenti la densità appare già riempitiva della retta e dunque non concepiscono che differenza vi sia tra r_Q ed r. Né li aiuta molto, qualche anno dopo, lo studio di R e la definizione di continuità; il modello intuitivo della collana continua a dominare.

P3. Risulta evidente da questa ricerca che, a parte gli ostacoli epistemologici (già evidenziati dalla letteratura internazionale), vi sono forti ostacoli didattici derivanti dai modelli intuitivi erronei degli insegnanti che vengono proposti ai propri allievi. Per aggirare tali ostacoli occorre una maggiore formazione su questo tema, in modo da allontanare l'idea di infinito da un'impostazione puramente ed esclusivamente intuitiva; risulta in effetti necessario rivedere la lista dei contenuti da proporre agli insegnanti in via di formazione iniziale a qualsiasi livello scolastico, in modo che gli studenti non arrivino ad affrontare lo studio dell'Analisi alle superiori già con forti misconcetti alle spalle. La trattazione delle problematiche concernenti l'infinito attuale richiede infatti lo sviluppo di modelli intuitivi diversi e a volte addirittura opposti rispetto a quelli che si usano nel finito. A nostro avviso bisognerebbe iniziare fin dalla scuola primaria un'opportuna educazione alla trattazione di insiemi infiniti che permetta allo studente di cominciare a notare le principali differenze che vi sono tra l'àmbito finito e quello infinito, sia nel campo geometrico che numerico.

9. Conclusioni

In molte ricerche sul tema dell'infinito matematico, era maturata la convinzione che gli ostacoli che impediscono la comprensione di questo concetto, siano soprattutto di natura epistemologica.

In questa ricerca si sono messe in evidenza le false credenze degli insegnanti elementari nei confronti dell'infinito, sorrette da immagini mentali erronee che condizionano le loro convinzioni, di conseguenza il loro insegnamento. Molti insegnanti coinvolti in questo lavoro di ricerca, dopo aver richiesto chiarimenti, hanno con convinzione e grande professionalità riconosciuto che il loro insegnamento era ricco di modelli sbagliati; modelli che i bambini ritrovavano confermati anno dopo anno e che, a detta degli insegnanti stessi, potevano essere il punto di partenza di futuri ostacoli didattici. Per questa sincerità e professionalità, vogliamo ringraziarli.

A nostro avviso le grandi difficoltà rilevate nella comprensione dell'infinito matematico non sono dovute solamente ad ostacoli epistemologici, ma amplificate anche da ostacoli di tipo didattico creati dalle idee intuitive degli insegnanti; è anche molto probabile che le lacune su questo tema non siano un problema esclusivo della scuola elementare, ma che siano invece diffuse ad ogni livello scolastico tra tutti quegli insegnanti a cui non è stata data l'occasione di riflettere sull'infinito matematico.

In effetti questo tema è risultato fino ad ora troppo sottovalutato, soprattutto come argomento di formazione degli insegnanti, e sembrerebbe che proprio da questa mancanza derivino in parte le difficoltà degli studenti di scuola superiore che portano con sé forti convinzioni antecedenti non idonee ad affrontare le nuove situazioni cognitive. Bisogna quindi tentare di inibire e superare i modelli che provocano ostacoli nella mente degli insegnanti e di conseguenza degli allievi proponendo, come abbiamo già sostenuto in diversi punti dell'articolo, corsi di formazione per insegnanti elementari che tengano conto degli aspetti intuitivi e delle peculiarità dell'infinito, oltre che dei risultati rilevati dai ricercatori in didattica della matematica. Corsi basati sulla discussione, sul confronto con gli aspetti storici, che permettano di partire dalle idee intuitive primarie per poi evolvere in nuove, più evolute, convinzioni.
Questa necessità è stata anche evidenziata ed esplicitata con forza, da parte di tutti gli insegnanti coinvolti in questo lavoro di ricerca. A questo proposito si riportano di seguito due interventi di insegnanti:

M.: … Sì, è la geometria che facciamo che tende a farceli vedere i punti. Ci vorrebbe qualcuno che ci faccia riflettere su queste cose e sull'importanza di trasferirli in modo corretto. Nella matematica che abbiamo fatto noi, non ci facevano riflettere su queste cose. Ci vorrebbe un po' di teoria a monte.

A.: Noi pecchiamo di semplificazione, senza studiare la teoria. Siamo convinte di averla, ma non l'abbiamo la teoria. Ci preoccupiamo di trasferirla in modo concreto, senza approfondire come funziona.

Questa formazione farà sì che gli insegnanti della scuola primaria curino i concetti relativi agli insiemi infiniti, coinvolgendo gli alunni in esperienze significative e in attività che permettano di costruire immagini intuitive coerenti con la teoria degli insiemi infiniti.

Bibliografia

Arrigo G., D'Amore B. (1993). *Infiniti*. Milano: Angeli.

Arrigo G., D'Amore B. (1999). "Lo vedo ma non ci credo...". Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 22B, 5, 465-494.

Arrigo G., D'Amore B. (2002). "Lo vedo ma non ci credo...", seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica.* 1, 4-57.

Bagni G.T. (1998). L'infinitesimo attuale e potenziale nelle concezioni degli studenti prima e dopo lo studio dell'Analisi. *L'educazione matematica*. XIX, V, 3, 2, 110-121.

Bagni G.T. (2001). Infinito e infinitesimo potenziale e attuale: una sfida per la Scuola Secondaria Superiore. *Bollettino dei docenti di matematica*. 42, 9-20.

Brousseau G. (1983). Ostacles Epistemologiques en Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques.* 4, 2, 165-198.

Brousseau G., Pères J. (1981). Le cas Gaël. Université de Bordeaux I, Irem.

D'Amore B. (1996). L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi. *La matematica e la sua didattica*. 3, 322-335.

D’Amore B. (1997). Bibliografia in *progress* sul tema: «L’infinito in didattica della matematica». *La matematica e la sua didattica*. 3, 289-305.
D’Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica.* Bologna: Pitagora. III ed. 2001.
Duval R. (1995). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? Actes de L’École d’été 1995. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica*. 3, 1996, 250-269].
Fischbein E. (1985). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In: Chini Artusi L. (ed.) *Numeri e operazioni nella scuola di base.* Bologna: Zanichelli-UMI. 122-132.
Fischbein E. (1992). Intuizione e dimostrazione. In: Fischbein E., Vergnaud G. (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. Bologna: Pitagora. 1-24.
Fischbein E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics.* 24, 139-162.
Fischbein E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics.* Infinity – The Never-ending Struggle. 48, 2-3.
Fischbein E., Jehiam R., Cohen D. (1994). The irrational numbers and the corresponding epistemological obstacles. *Proceedings of the XVIII PME*. Lisboa. 2, 352-359.
Fischbein E., Jehiam R., Cohen D. (1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*. 29, 29-44.
Gilbert T., Rouche N. (2001). *La notion d’infini. L’infini mathématique entre mystère et raison.* Paris: Ellipses.
Gimenez J. (1990). About intuitional knowledge of density in Elementary School. *Atti del XIV PME.* Mexico. 19-26.
Hilbert D. (1925-1989). On the infinite. In: Benacerraf P., Putnam H. (eds.) *Philosophy of mathematics*. New York: Cambridge University Press.
Moreno L.E., Waldegg G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics*. 22, 211-231.
Perret Clermont A.N., Schubauer Leoni M.L., Trognon A. (1992). L’extorsion des réponses en situation asymmetrique. *Verbum* (Conversations adulte/enfants). 1/2, 3-32.
Perrin Glorian M.J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives. In: Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavignot P. (eds.) (1994). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. Grenoble: La Pensée Sauvage. 97-147.
Romero i Chesa C., Azcárate Giménez C. (1994). An inquiry into the concept images of the continuum. *Proceedings of the PME XVIII*. Lisboa. 185-192.
Schneider M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des «découpages infinis» des surfaces et des solides. *Recherches en Didactiques des Mathématiques.* 23, 241-294.
Schubauer Leoni M.L. (1997). Rapporto al sapere del docente e decisioni didattiche in classe. In: D’Amore B. (ed.) (1997). *Didattica della Matematica e realtà scolastica.* Atti dell’omonimo Convegno Nazionale, Castel San Pietro Terme. Bologna: Pitagora. 53-60.

Sfard A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins. *Educational Studies in Mathematics*. 22, 1-36.

Shama G., Movshovitz Hadar N. (1994). Is infinity a wholer number? *Proceedings of the XVIII PME*. Lisboa. 2, 265-272.

Spagnolo F. (1998). *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*. Firenze: La Nuova Italia.

Tall D. (1980). The notion of infinity measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*. 11, 271-284.

Tall D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*. Infinity – The Never-ending Struggle. 48, 2-3.

Tsamir P. (2000). La comprensione dell'infinito attuale nei futuri insegnanti. *La matematica e la sua didattica*. 2, 167-207.

Tsamir P., Tirosh D. (1992). Students' awareness of inconsistent ideas about actual infinity. *Proceedings of the XVI PME*. Durham NH. 90-97.

Tsamir P., Tirosh D. (1994). Comparing infinite sets: intuition and representation. *Proceedings of the XVIII PME*. Lisboa. 2, 345-352.

Tsamir P., Tirosh D. (1997). Metacognizione e coerenza: il caso dell'infinito. *La matematica e la sua didattica*. 2, 122-131.

Waldegg G. (1993). La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 5, 19-36.

Indirizzo di posta elettronica: silvia.sbaragli@infinito.it

Esprimo la mia più sincera e profonda gratitudine a Bruno D'Amore, ispiratore e paziente lettore di questo articolo, che mi ha suggerito diverse modifiche ed integrazioni e che mi ha consigliato alcuni testi che ora figurano in bibliografia.
Esprimo inoltre il mio apprezzamento per il costruttivo lavoro critico dell'anonimo referee che, oltre a suggerire alcune modifiche, è stato anche generoso nell'indicazione di ulteriore bibliografia.